

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c \sinh n$$

$$\Rightarrow c \sinh n = \frac{1}{\sinh n} = \frac{1}{\frac{e^n - e^{-n}}{2}} = \frac{2}{e^n - e^{-n}}, \quad a_n = \frac{2}{e^n - e^{-n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^n - e^{-n}} = \frac{2}{\infty - 0} = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow e^x \geq e$$

$$f'(x) = \frac{0 - 2(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} < 0 \quad -x \leq -1 \Rightarrow e^{-x} \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$-e^{-x} \geq -\frac{1}{e}$$

$$e^x - e^{-x} \geq e - \frac{1}{e} > 0$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} dx = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$$

$$= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{e^x (e^x - 1)} dx$$

$$e^x = u \\ e^x dx = du$$

$$= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^{e^b} \frac{1}{u^2 - 1} du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^{e^b} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \bigg|_e^{e^b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{e^b-1}{e^b+1} \right| - \ln \left| \frac{e-1}{e+1} \right|$$

$$= 0 - \ln \left| \frac{e-1}{e+1} \right| \quad \text{هنگام است}$$

سری همگرای مطلق (مطلقاً همگراست):

سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را مطلقاً همگرا گویند هرگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ همگرا باشد

* همگرای مطلق $\Leftarrow$ همگرا
 $\Rightarrow$

سری متناوب:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

آزمون سری متناوب:

سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ را همگرا گویند هرگاه در شرایط

زیر صحت کند صفتی یچ

۱) $a_n > 0$ (به ازای هر $n \geq 1$)

۲) $\{a_n\}$ نزولی باشد ($a_{n+1} \leq a_n$)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (۳)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{1}{n}$

(مثال)

۱) $a_n = \frac{1}{n} > 0$

۲) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
هنگام است

۳) $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < a_n = \frac{1}{n}$ نزولی

و اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (هارمونیک) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ به سری هارمونیک

هنگامی مشروط: اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ هنگامی باشد و لی سری

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ هنگامی نباشد. گوئیم سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ به طور مشروط (مطلق)

(هنگامی مشروط) است

آزمون های هنگامی مطلق ۱- آزمون نسبت (دالامبر)
۲- آزمون ریشه

آزمون نسبت: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$
سری هنگامی مطلق است $L < 1$ و اگر است $L > 1$ و اگر است $L = 1$

نتیجه ای نمی توان یافت (باید از آزمون دیگری استفاده کرد)

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ > 1
< 1
= 1

آزمون ریش

توضیحات همون قبلی ها است

مثال روی همگرای یا واگرایی سری های نامتناهی زیر بحث کنید

۱) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ $a_n = \frac{1}{n!}$; $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ همگرای مطلق است

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$v! = v \times (v-1)!$

۲) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v^{n+1} + \omega}{v^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{v^{n+1} + \omega}{v^{n+1}}}{\frac{v^n + \omega}{v^n}}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v^{n+1} + \omega}{v^{n+1}} \cdot \frac{v^n}{v^n + \omega} = \frac{1}{v} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v^{n+1} + \omega}{v^n + \omega} = \frac{1}{v} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v(1 + \frac{\omega}{v^{n+1}})}{1 + \frac{\omega}{v^n}}$

$= \frac{1}{v} < 1$ سری همگرا مطلق است

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n + \omega}{r^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r^n}{r^n} + \frac{\omega}{r^n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{r} \right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \omega \left(\frac{1}{r} \right)^n \quad \begin{matrix} a = \omega \\ q = \frac{1}{r} < 1 \end{matrix}$$

$$\text{سری هندسی} \quad q = \frac{1}{r} < 1 \quad a = 1$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{r}{r}} + \frac{\omega}{1 - \frac{1}{r}} = r + \frac{\omega}{r} = \frac{r^2 + \omega}{r}$$

مقدار هندسی

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(rn)!}{n!n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(r(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!n!}{(rn)!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(rn+r)!}{(n+1)!(n+1)!} \times \frac{n!n!}{(rn)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(rn+r)(rn+1) \dots (rn)!}{(n+1)n! \times (n+1)n! \times (rn)!} \times n! \times n!$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(rn+r)(rn+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^2}{n^2} = 0 < 1$$

سری واکراست

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r \cdot n! \cdot n!}{(rn)!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r \cdot (n+1)! \cdot (n+1)!}{(r(n+1))!}$$

$$\Rightarrow r \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(n+1)n!n! \cdot (rn)!}{(rn+r)(rn+1)(rn)! \cdot n!n!}$$

$$= r \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{(rn+r)(rn+1)} = r \times \frac{1}{r} = 1$$

سری واکراست

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{r^n} \Rightarrow a_n = \frac{n^r}{r^n} \Rightarrow |a_n| = \frac{n^r}{r^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^r}{r^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^r}}{\sqrt[n]{r^n}}$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^r} = \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{r}{n}} = \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\frac{1}{n}})^r = \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n})^r$$

$$= \frac{1}{r} \times (1)^r = \frac{1}{r} < 1 \quad \text{مقدار کمتر از 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln n}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}}$$

$$\stackrel{H}{=} e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n} \right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+n} \right) = 0 < 1 \quad \text{مقدار کمتر از 1}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^r} = \sqrt[r]{\frac{r^n}{n^r}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r}{\sqrt[n]{n^r}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r}{(\sqrt[n]{n})^r} = r > 1 \quad \text{و آنرا بیشتر}$$

مقدار بیشتر از 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \Rightarrow a = \text{شکله}$$

$$C_n = \text{ضرایب}$$

$$x = \text{متغیر}$$

$$= C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots \quad ; \quad a=0 \quad \text{توجه آخر}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

مثال های دوم
سری هندسی با قدر نسبت x
و جمله اول 1

$$= \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

$$2) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad \text{سری هندسی با جمله اول 1 و قدر نسبت } -x$$

$$= \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \quad |1-x| = |x| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

مثال حاصل عبارت زیر را به صورت یک سری توانی بنویسید

$$1) f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

$$|\frac{x}{2}| < 1 \Rightarrow |x| < 2$$

قدر مطلق x با y $\Leftarrow -2 < x < 2$

Day. Month. Year.

Subject.

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 2} \Rightarrow \frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}$$

$$= (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) - \frac{1}{2} (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{13}{16}x^3 + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} (-1)^{n+1} x^n \quad |x| < 1$$

(تقریب) $\frac{1}{1+x^2} =$, $\frac{1}{1-x^2} =$