

$$۷) \{ \cos n\pi \} \Rightarrow a_n = \cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ -1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos n\pi = \text{موجود نیست}$$

والترا

حد زیر دنباله ها زوج آن 1 است
فرد آن -1 است
این دنباله واگراست

$$۸) \left\{ \frac{cn^n + \epsilon n - 1}{cn^n + \epsilon n + \epsilon} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{cn^n + \epsilon n - 1}{cn^n + \epsilon n + \epsilon} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{cn^n}{cn^n} = 1$$

$$۹) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^r} \Rightarrow \frac{\ln n}{n^r} \xrightarrow{H} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{r n^{r-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{r n^r} = \frac{1}{r \cdot +\infty} = 0$$

$$۱۰) \left\{ \left(1 + \frac{1}{cn}\right)^n \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{cn}\right)^n = e^{1/c}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{cn}\right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{cn}\right)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{cn}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{cn}\right)}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{cn}\right)}{\frac{1}{cn}}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{cn+1}{cn}\right)}{\frac{1}{cn}}}$$

$$\xrightarrow{H} e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{cn^2}}{\frac{cn+1}{cn}}}{-\frac{1}{cn^2}}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{cn}{cn^2(cn+1)}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{cn}{cn^3 + cn^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{cn^2 + cn}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{cn^2(1 + \frac{1}{n})}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{cn^2}} = e^0 = 1$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{cn}{cn^2(cn+1)}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{cn}{cn^3 + cn^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{cn^2 + cn}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{cn^2(1 + \frac{1}{n})}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{cn^2}} = e^0 = 1$$

نکته ۳) در دنباله $\{r^n\}$ اگر $|r| < 1$ باشد دنباله به صفر همگراست و در

غیر این صورت $|r| \geq 1$ واگراست

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{هنگامی که } |r| < 1 \\ +\infty & \text{و اگر } |r| \geq 1 \end{cases}$$

توجه: دنباله $\{a_n\}$ را صعودی گویند هرگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$a_{n+1} \geq a_n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} \leq a_n$$

دنباله $\{a_n\}$ را

الف) از بالا کران دار گویند هرگاه $a_n \leq M$ باشد که M

ب) از پایین کران دار گویند هرگاه $a_n \geq M$

دنباله $\{a_n\}$ کران دار گویند اگر از بالا و پایین کران داشته باشد یعنی $|a_n| \leq M$.

صعودی یا نزولی

نکته ۱) هر دنباله $\{a_n\}$ یک کران و کرانی دارد همگراست

نکته ۲) هر دنباله $\{a_n\}$ یک کران و کرانی دارد واگراست

سری نامتناهی: فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ یک دنباله باشد و

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

آنگاه دنباله $\{S_n\}$ را دنباله مجموع‌های جزئی گویند و به سری

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

نامشاهی معروف است

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

توجه! سری نامشاهی $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (با جملات مثبت) را همگرا گویند هرگاه

دنباله مجموع‌های جزئی آن همگرا باشند به عبارت دیگر:

$$\text{if } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xrightarrow{\text{همگرا}} S$$

$$\text{if } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \text{شده موجود نیست} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ واگرا}$$

توجه! اگر $a_n > 0$ باشد دنباله مجموع‌های جزئی دنباله‌ای صعودی خواهد بود

$$S_{n+1} \geq S_n$$

نکته (مهم): اگر سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگرا}$$

مثال فرض $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا حکم $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

فرض کنید $\{S_n\}$ دنبالی مجموع های جزئی این سری باشد و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$$

همین

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

سری هسار (هارمونیک)

مثال روی همگرایی یا واگرایی سری های زیر اجمت کنید

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} Lnn = \lim_{n \rightarrow +\infty} Lnn = +\infty \neq 0 \quad \text{واگرا}$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n^{r+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{n} \neq 0 \quad \text{واگرا}$$

سری تلسکوپی (قاعده ادغام):

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1})$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1})$$

Subject: _____

Date _____

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

مثال

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 \quad \text{شبه لانه همگراي را دارد}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)} \quad \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(cn-1)(cn+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{cn-1} - \frac{1}{cn+1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{cn-1} - \frac{1}{cn+1} \right) \Rightarrow \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{cn-1} - \frac{1}{c(n+1)-1} \right)$$

$$= \frac{1}{c} \left(\frac{1}{c} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c(n+1)-1} \right) = \frac{1}{c^2}$$

سری هندسی
سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

رابطه یک سری هندسی با قدر نسبت q و جمله اول a که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} aq^{n-1} = a \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n-1} = \begin{cases} ax_0 = 0 & |q| < 1 \\ \text{و آنگاه} & 0, \infty \end{cases}$$

Subject:
Date:

اگر $|q| < 1$ باشد سری هندسی $\frac{a}{1-q}$ همگراست $\sim \sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$$S_n - qS_n = a - aq^n \Rightarrow S_n(1-q) = a(1-q^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$= \frac{a}{1-q} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q} (1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n) \xrightarrow[\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0]{|q| < 1} \frac{a}{1-q}$$

چون دنباله $\{S_n\}$ همگراست پس $\frac{a}{1-q}$ همگراست پس

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

در حالت $|q| < 1$ داریم

مثال همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$$

شرط لازم همگرایی را دارد

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

یک سری هندسی با جمله اول $\frac{1}{e}$ و قدر نسبت $\frac{1}{e} < 1$

$$۲) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \omega}{r^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega \left(-\frac{1}{r}\right)^n \quad \begin{matrix} a=\omega \\ q=-\frac{1}{r} \end{matrix} \quad \frac{\omega}{1-(-\frac{1}{r})} = \frac{\omega}{\frac{r+1}{r}} = \frac{\omega r}{r+1}$$

$$1 - \frac{1}{r} < 1$$

$$۳) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{n+1}}{\omega^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} r \left(\frac{r}{\omega}\right)^n \quad \begin{matrix} a=r \\ q=\frac{r}{\omega} \end{matrix} \quad \frac{r}{1-\frac{r}{\omega}} = \frac{r\omega}{\omega-r}$$

کسر اعشاری ۰٫۵۲۲۲... را به کسر متناهی تبدیل کنید

$$\begin{matrix} a=0.5 \\ q=0.1 < 1 \end{matrix} \quad \frac{0.5}{1-0.1} = \frac{0.5}{0.9} = \frac{5}{9} = \frac{1}{\frac{9}{5}}$$

حالت کلی

$$0.\bar{a} = 0.aaaa... = \sum_{n=1}^{+\infty} 0.a (0.1)^{n-1}$$

$$= 0.a + 0.10a + 0.100a + ... \quad \begin{matrix} a=0.a \\ q=0.1 \end{matrix} \quad \frac{0.a}{1-0.1} = \frac{0.a}{0.9} = \frac{a}{9}$$

$$0.10\bar{9} = 0.109999... = 0.109 + 0.1009 + 0.10009 + ...$$

$$\begin{matrix} a=0.109 \\ q=0.1 \end{matrix} \quad \frac{0.109}{1-0.1} = \frac{0.109}{0.9} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n \frac{\pi}{4} = 1 + \sin \frac{\pi}{4} + (\sin \frac{\pi}{4})^2 + ...$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + ...$$

$$\begin{matrix} a=1 \\ q=\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \end{matrix} \quad \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$$

آزمون های همگرایی سری های نامتناهی

۱) آزمون انتگرال (از این آزمون برای بررسی همگرایی سری های نامتناهی با جملات مثبت استفاده می کنیم)

فرض کنید f تابعی است پیوسته نزولی و به ازای هر $x > 1$ دارای مقدار مثبت
 $(f(x) > 0, \forall x > 1)$ در این صورت سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

همگراست $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$ همگرا باشد

مثال) روی همگرایی یا واگرایی سری های نامتناهی زیر بحث کنید

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

(شرط لازم همگرایی را دارد)

$$f(n) = n e^{-n} \quad 1) f(x) = x e^{-x} \quad x > 1 \text{ پیوسته}$$

$$f(x) = x e^{-x} > 0 \quad \forall x > 1 \quad f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$= (1-x) e^{-x} < 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 1-x < 0$$

نزولی
 (پیوستگی $f(x)$ نزولی بودن روی $x > 1$ و مثبت بودن)

نقطه شرط آزمون انگرال برقرار است

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (x(-e^{-x}) - (1)(-e^{-x})) \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} [(-be^{-b} - e^{-b}) - (-e^{-1} - e^{-1})] = 0 + 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b e^{-b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{e^b} \stackrel{H}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} = 0$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b} = 0$$

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1}(n)}{1+n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan^{-1}(n)}{1+n^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$$

$$1) f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} \quad x > 0, \quad x \geq 1 \quad \text{شرط لازم همگامی را دارد}$$

$$2) \text{ روی } (1, +\infty) \text{ صعودی است}$$

$$2) f'(x) = \frac{1+x^2(1+x^2) - \tan^{-1} x \cdot (2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 2x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^2} < 0 \quad \text{نزولی}$$

از حد مشخصی بعد

$$\int_1^{+\infty} \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\tan^{-1}x)^2 \right]_1^b = \frac{1}{2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} (\tan^{-1}(b))^2 - (\tan^{-1}(1))^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{4} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{16} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{\pi^2}{32}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1}n}{1+n^2}$$

$$u = \tan^{-1}x$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

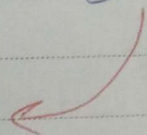
$$\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2} dx$$

$$= \int u du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2} (\tan^{-1}x)^2 + C$$

سلسلہ



(P > 0) سلسلہ - P

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^P}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^P} \stackrel{P > 0}{=} \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x^P} = x^{-P} > 0 \quad x \geq 1 \quad P > 0$$

$$f'(x) = -P x^{-P-1} < 0$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^P} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-P} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-P}}{1-P} \right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-P} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-P} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{1-P} & 1-P > 0 \\ -\frac{1}{1-P} = \frac{1}{P-1} & 1-P < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} \text{ مقدار } & p > 1 \\ \text{والت} & p < 1 \end{cases}$$

نتیجه: $p=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ سری دیرسز

۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} c s c h n$

۲) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^r e^{-n}$

~~۳)~~